Anais da Especialização em Educação Matemática-1ª Edição
Ano 2017 N. 02 V. 01 - ISSN 2358-1115

APLICAÇÃO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA E SUA INVERSA

Paulo Henrique Alves Batista[1]

Liliane de Oliveira Souza[2]

Rodrigo Bastos Daúde[3]

Resumo

Este estudo apresenta uma análise descritiva das aplicações das funções logarítmicas e sua inversa, a escolha se deve ao fato da singularidade de suas propriedades, que por mais que sejam conhecidas, porém se manifestam no cotidiano de forma implícita e explicita. Teve por objetivo evidenciar a visualização dessas funções no cotidiano e nas diversas áreas do conhecimento. Para esta pesquisa, tornou-se essencial um levantamento bibliográfico associado a descrições qualitativas. Buscou-se mostrar a praticidade que elas oferecem na compreensão do crescimento populacional logístico e exponencial, aplicabilidade esta da Biologia e assim foi destacado a versatilidade que essas funções contêm, em promover o entendimento de situações cotidianas. As demonstrações matemática, do modelo junto ao significado de cada coeficiente da relação em estudo. Neste caso, independentemente do tipo de manifestação, o estudo possibilitou o entendimento do comportamento de ambos os crescimentos, além de mostrar o efeito que cada fator desempenha na situação, sendo o modelo capaz de analisar populações diversas.

Palavras – Chaves: Função Logarítmica; Inversa; Aplicabilidade; Manifestação; Cotidiano.

Introdução

Neste artigo foi realizado um estudo sobre o crescimento populacional uma aplicabilidade da função logarítmica e sua inversa para que haja a compreensão da sua utilidade no nosso cotidiano.

[1] Acadêmico do Curso de Especialização em Educação Matemática. Universidade Estadual de Goiás UEG, Cidade de Goiás – GO. paulohmatematico@hotmail.com.

[2] Mestre em Educação em Ciência e Matematica. Professora da Especialização em Educação Matemática e da Licenciatura em Matemática da UEG Campus Cora Coralina. lilinda_souza@hotmail.com

[3] Doutorando em Educação pela Faculdade de Educação (UFG). Mestre em Educação, Ciências e Matemática pela UFG, Especialista em Matemática e Educação Matemática pela UEG. Licenciado em Matemática pela UEG. daude10@hotmail.com.

A matemática é uma ciência notável no cotidiano, entretanto, dentre os seus diversos tópicos, existem aqueles que possuem uma aplicabilidade mais discreta, mas que é de suma importância para a compreensão do comportamento de fenômenos naturais.

Devido esses tipos de manifestações implícita e explícita a identificação das aplicações podem ser de difícil visualização, pelo fato de exigir do observador um maior conhecimento matemático acerca das propriedades dessas funções. Mas isso não impede o reconhecimento das mesmas, até por que, existem diversas áreas do conhecimento no qual atuam até mesmo de forma predominante, como na: Biologia, Química, Física, Geografia, Reino animal e outros.

No entanto, sabendo que este artigo é uma extensão dos estudos realizados no trabalho monográfico do ano de 2014, no qual se objetivou responder algumas perguntas que só a aplicação não contempla a curiosidade de aplicador, porque usar um modelo matemático sem entender sua utilidade, seus significados, não haveria compreensão, por isso, foi enfatizado a demonstração da relação do modelo de aplicação estudado com o intuito de destacar com clareza a utilidade do mesmo.

A pesquisa ocorreu com o intuito de aproximar a sua aplicação do cotidiano e sensibilizar todos da relevância do tópico para a Biologia, por que além de oferecer um resultado preciso e menos trabalhosos, é possível fazer uma projeção, já que é uma análise mais rápida, devido a forma com que seus resultados são apresentados e confirmados a eficácia através dos autores: Lima (1996), Peroni & Hernández (2011), Odum (s. d).

Fonseca (2013) afirma que os diversos tipos de manifestações de cada função e o estudo de suas propriedades refletem a importância de conhecer as áreas do conhecimento que dialoga ou usa desta ferramenta matemática.

Neste trabalho será dado ênfase ao crescimento populacional e sua manifestação implícita e explicita. E simultaneamente, a exposição de modelos matemáticos que representam cada caso de aplicabilidade relatado, destacando a origem das relações matemáticas através de suas demonstrações feitas juntamente com Odum (2001), Pereira

(2006), Bronson & Costa (2008) e outros e a partir destas, as possíveis explicações do surgimento de cada coeficiente do modelo e finalizando com exemplos de aplicações sobre o tópico.

Para a elaboração desse artigo foi utilizado a princípio a pesquisa bibliográfica. Esse recurso metodológico se fundamenta por meio de registros, e pesquisas desenvolvidas anteriormente, em livros, dissertações e outros. Faz uso de dados teóricos de outros pesquisadores e principalmente registrados. (SEVERINO, 2007).

Vale destacar que essa pesquisa é do tipo qualitativa, pois os modelos matemáticos oferecem a oportunidade de analisar os impactos de um crescimento para uma população e os resultados números encontrados são fundamentais para construir projeções sobre os impactos que cada fator natural como taxa de natalidade, mortalidade e outros, desempenha na população em estudo.

A descrição foi realizada por meio de abordagens nas quais deixará explicitas as características das funções estudadas com o intuito de evidenciar as influências relevantes para o cotidiano. O que motivou essa investigação em conhecer de forma mais profunda das aplicações da função logarítmica e sua inversa foi o fato da mesma se manifestar de forma discreta e em algumas situações quase imperceptíveis. Isso ocorre devido à falta de conhecimento acerca do assunto, o que gera um pré-conceito diante da sua utilização no meio cotidiano.

O texto que segue irá discutir a respeito da aplicação matemática da função logarítmica e sua inversa.

1. Aplicação matemática da função logarítmica e a sua inversa

A aplicação matemática pode se manifestar de duas formas: implícitas e explicitas. Para uma melhor compreensão deste processo e principalmente no quesito de identificação, precisa-se abordar o significado literal de cada termo, segundo o dicionário Dicio (2009 –

2014) o termo explicito significa: "adj. Que está perfeitamente enunciado; claro, preciso, formal [...]." E o termo implícito por sua vez significa: "adj. Que se apresenta de modo obscuro; que está ou permanece subentendido; que não se pode expressar formalmente; não declarado; obscuro, oculto, tácito. "

Em outras palavras, estar explicita é quando a função analisada não precisa de operação nenhuma para ser identificada está visível no modelo, já a implícita é o contrário, pois está oculta, ou seja, necessita de uma operação para ser visualizada no modelo estudado.

Um exemplo que pode facilitar a compreensão da manifestação das funções e uma aplicação na qual a função está implícita é no crescimento populacional exponencial de uma colônia de bactérias, o modelo desta aplicação é caracterizado pela lei de formação algébrica a seguir: $f(t) = b.a^t$, sabe-se que a e b são constantes e que **a**: fator de crescimento e b: representa a população inicial de bactérias; **t**: representa o tempo gasto para a população atingir a quantidade **f (t)** em bactérias.

Para determinação do tempo gasto para obter uma certa quantidade de bactérias, geralmente a função logarítmica é utilizada porque nem sempre é possível aplicar a propriedade de redução de bases iguais, característica da função exponencial, mas percebe-se que a operação dos logaritmos não está presente na função de forma explicita, no entanto, há necessidade de obter resultado para t e a operação inversa da função exponencial é a mais adequada para essas situações.

Explicitamente, há um exemplo clássico: a intensidade do som, porque o modelo caracteriza diretamente pela função logarítmica, o que significa que não precisa de operação matemática nenhuma para identificar a função logarítmica aqui, simplesmente, o estudo é feito diretamente com a função. A mesma é determinada da seguinte forma: $N = 10.\log \frac{I}{I_0}$, onde I é a intensidade do som e o I_0: é o nível de referência e N: nível relativo da intensidade do som, este é um dos casos que se pode visualizar a presença explicita da função logarítmica, porque a sua operação é a própria relação. Macarini afirma que:

> A matemática está presente na vida cotidiana de todo cidadão, por vezes de forma implícita ou explícita. No momento em que abrimos os olhos e olhamos as horas do relógio, fazemos almoço e ainda andamos na rua para fazer compras, estamos exercitando nossos conhecimentos matemáticos (2007, p. 38).

Neste trecho, Macarini (2007) confirma que estas modalidades de aplicações implícitas e explicitas, porque frequentemente se depara com objetos e situações que utilizam conceitos destas funções, mesmo que em algumas circunstâncias são utilizados de maneira inconsciente por cada cidadão.

Ao abranger o significado dos termos para a matemática, percebe-se que existem aplicações que sua identificação é rápida pelo fato de suas características estarem claras e precisas. Porém, algumas situações são representadas de forma tão sucinta que na maioria das vezes, os conhecimentos matemáticos não são capazes de reconhecê-los rapidamente por estarem obscuro, ou seja, subentendidos ao ponto de termos dificuldades de identificar o tópico que a representa.

Ao tratar de um assunto tão extenso e aplicável como as funções, se sentir confuso frente as inúmeras propriedades é algo comum. De acordo com Teixeira & Fonseca (2013, p. 27), as funções: “[...] são uma poderosa ferramenta para representar e interpretar situações, tanto da realidade como da própria Matemática, que envolvam relações entre variáveis. ”

Isso confirma a relevância das funções para o cotidiano, já que existe um artificio capaz de proporcionar uma análise quantitativa por meio da representatividade numérica e até mesmo qualitativa quando se analisa as características daquele fenômeno e deixa em segundo plano a análise numérica.

É nítida a manifestação constante das funções em nosso dia a dia, nota-se que ela está associada à velocidade de um carro, ao crescimento populacional, no empréstimo bancário, nos voos das aves de rapinas e vários outros. E dentre estes exemplos citados, destaca-se neste artigo um estudo sobre o crescimento populacional.

Os impactos desta aplicação podem ser diretamente ou indiretamente, uma vez que os modelos explicam situações próximas da nossa realidade, seja a população de um dado animal ou até mesmo a humana. Para evidenciar estes impactos, considera-se relevante explorar a origem da função logarítmica e principalmente, pontuar as suas características desde a construção do modelo até a utilidade prática. Por que não é adequado falar dessas funções sem mostrar o quanto as suas propriedades são sustentadas por uma teoria.

Esta teoria, contribui diretamente na biologia uma vez que ao abordar a versatilidade desta função para a área e expor os pontos positivos, negativos, consequências, relevância e outras. Para o caro leitor ter o acesso a um estudo não qualitativo sobre crescimento populacional e pontuar os aspectos positivos e negativos que cada uma carrega, para assim conhecer a importância dessas funções.

O texto que segue evidenciará a descrição da construção do modelo e exposição de exemplos sobre crescimento populacional em situações distintas.

2. Função logarítmica, exponencial: e o crescimento populacional

Uma aplicabilidade dessas funções está basicamente centrada nos cálculos de crescimento populacional, pode-se observar que a relação que descreve tal fenômeno envolve a função exponencial. O tempo é a variável independente do processo e em casos de determinação de valores para essa variável, na maioria das vezes utiliza-se os conceitos da operação que rege a função logarítmica porque ela é capaz de oferecer respostas rápidas que descreve perfeitamente a situação.

Em uma população, cada indivíduo é um elemento, sabe-se que na definição de crescimento populacional pode-se esboçar representações matemáticas para descrever tal tópico. É explicita a relação que acontece entre duas grandezas na situação analisada:

Anais da Especialização em Educação Matemática-1ª Edição
Ano 2017 N. 02 V. 01 - ISSN 2358-1115

tempo e número de indivíduos. Já que a principal condição foi pré-estabelecida: a relação entre dois conjuntos.

Crescimento populacional desfruta das propriedades e definições da função exponencial e logarítmica. Como relatado anteriormente que o número de indivíduos depende do tempo em que foi estabelecida a análise, nota-se que o modelo matemático usado deixa em destaque o uso da função exponencial porque uma das grandezas, nesse caso, o tempo está descrito na representação matemática no expoente da relação.

Entretanto, a função exponencial é intimamente ligada à função logarítmica pelo fato de uma ser o inverso da outra. Compreende-se que de forma implícita os conceitos da operação da função logarítmica, pois ela possui propriedades capazes de determinar valores/ resultados para situações como esta, no qual o tempo é a nossa grandeza em questão.

É conhecido que existem dois tipos principais de crescimentos populacionais: o exponencial e o logístico. O exponencial é a que feito de forma mais independente sem sofrer influência da densidade[4] da população, ao contrário do logístico que considera todas essas influencias inclusive o tamanho da população. A seguir, a demonstração das relações matemáticas que representam cada tipo deste fenômeno. Considere:

P: quantidade de indivíduos em determinado instante de tempo.

P_o: quantidade inicial de indivíduos.

t: tempo de análise.

N: nascimentos.

M: mortes.

E: emigração[5].

I: imigração[6].

---

[4] Decorrem do tamanho da população.
[5] Indivíduos que saem do grupo.
[6] Indivíduos que entram no grupo.

Sendo P a densidade final da população em um dado instante t, notamos que a derivada é a uma representação de taxa de variação, isso significa que $\frac{dP}{dt}$ a quantidade de indivíduos a cada instante t, por meio da definição de derivada obtém-se que:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{P - P_0}{t - t_0} = \frac{dP}{dt}$$

Porém para chegar a essas conclusões deve-se analisar que uma população para atingir determinado aglomerado de indivíduos sofre uma série de influências, como: a entrada e saída de pessoas do grupo, ou seja, mortes e nascimentos são os principais fatores que interferem diretamente na constituição do conjunto.

Entretanto, é importante destacar que no crescimento populacional exponencial, a entrada e saída é desconsiderada, e isso faz com que este modelo seja utilizado frequentemente em colônias de bactérias em situações laboratoriais, no qual a ação humana é um fator determinação na formação desse grupo, por isso, percebe-se que o número de indivíduos de um dado instante de tempo surge a partir da diferença entre os nascimentos e mortes ocorridas nessa população, então:

$$\frac{dP}{dt} = N - M \tag{1}$$

A derivada é uma taxa de variação e por meio dela pode-se determinar a taxa percentual de mortes e nascimento em relação ao número de indivíduos deste grupo, assim, seja n e m respectivas taxas percentuais de natalidade e mortandade, no qual foram determinados por meio da razão, descrita a seguir:

$$n = \frac{\text{Número total de nascimentos}}{\text{Total de individios da população}}$$

$$m = \frac{Número\ total\ de\ mortes}{Total\ de\ individios\ da\ população}$$

Então:

$$n = \frac{N}{P} \Rightarrow N = nP$$

$$m = \frac{M}{P} \Rightarrow M = mP$$

Substituindo os valores de N e M, em função de suas taxas percentuais, apresenta-se que:

$$\frac{dP}{dt} = nP - mP$$

Logo:

$$\frac{dP}{dt} = (n - m)P$$

O tipo de equação acima é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis, note que busca-se determinar a família de função que descreve esse modelo e, além disso, mostrar como são responsáveis pela obtenção daqueles números totais de indivíduos de certa população e que o fator $(n - m) = r$ que é também denominado como taxa intrínseca (Peroni & Hernández, 2011), por isso a sua resolução a seguir será assim:

Anais da Especialização em Educação Matemática-1ª Edição
Ano 2017 N. 02 V. 01 - ISSN 2358-1115

$$\frac{dP}{dt} = rP\,(limite\ definido\ em\ P)$$

$$\frac{dP}{dt} - rP = 0$$

$$\frac{dP}{dt}.dt - (rP).dt = 0.dt$$

$$[dP - (rP).dt = 0.dt] \div P$$

$$\frac{1}{P}.dP - rdt = 0.dt$$

$$\int \frac{1}{P}.dP - \int r\,dt = \int 0.dt$$

$$\ln|P| - rt = c$$

$$\ln|P| = rt + c$$

$$|P| = e^{rt+c}$$

Como o número de indivíduos de uma população é sempre positivo, então pode-se descrever a relação da forma:

$$P(t) = e^{c}.e^{rt}$$

Sendo que no instante t = 0, a população inicial é representada por P_0, assim destaca que: P(0) = P_0, em consequência dessa generalização pode-se representar a relação do crescimento populacional da forma original que é:

$$P(0) = e^{c}.e^{r.0} \Rightarrow P(0) = e^{c}.e^{0} \Rightarrow P(0) = e^{c}.1 \Rightarrow P(0) = P_0 = e^{c}$$

Conclui-se, então que:

$$P(t) = P_0 . e^{rt} \tag{2}$$

Neste momento, evidencia-se a manifestação explicita, no qual relatava-se de uma manifestação explicita da função exponencial, pois a claramente consegue-se visualizar a variável explicativa que é o tempo situado no expoente do modelo matemático.

Dentro dessa ótica, esse tipo de relação é utilizado corriqueiramente em estudos laboratoriais e para o ser humano são utilizados em casos mais específicos, isso retrata um dos aspectos negativos do modelo, porque sua estruturação descreve apenas uma análise limitada e assim, não pode-se utilizá-lo para descrever o crescimento populacional. A seguir, um exemplo no qual este modelo matemático é utilizado no cotidiano.

Em laboratório, um pesquisador fazendo estudo sobre certo tipo de bactéria, pôde observar que a cada minuto que se passava havia uma duplicação. Sabe-se que o seu estudo partiu de uma bactéria, e este pesquisador buscou fazer uma projeção da quantidade futura de bactérias em certo intervalo de tempo, e considerou que não ocorre qualquer interferência que impeça um fluxo constante de crescimento como seria um modelo matemático para essa situação. Resolução. Note que quanto o tempo $t = 0$ minutos, a colônia tinha apenas 1 indivíduo, isso significa que $P(0) = 1$, então:

$$P(0) = P_0 . e^{r(0)}$$

$$P(0) = P_0 . e^0$$

$$P(0) = P_0$$

$$P(0) = 1 = P_0$$

Conclui-se que: $P_0 = 1$, logo:

$$P(t) = e^{rt}$$

É explicito que a duplicação acontece a cada minuto, no entanto pode – se afirmar que P(1) = 2; P(2) = 4 e assim sucessivamente, então:

$$P(1)=P_0 . e^{r(1)}$$

$$e^r = P(1) = 2$$

$$e^r=2$$

Neste instante não dá para perceber a função logarítmica, explicitamente, mas, agora como artificio de resolução será utilizada, porque ela possui propriedade que fazem com que a variável que se deseja determinar sendo ela a potência do logaritmando por meio da sua propriedade, torne um fator da multiplicação para assim por meio do princípio multiplicativo da equação possa ser determinado o valor e esta propriedade logarítmica que nos permite fazer isso será demonstrada e utilizada, posteriormente:

Propriedade 1:

$$\log_b a^n = n . \log_b a$$

(3)

Demonstração:

Sabe-se que:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Obter um termo igual a a^n , então se elevar ambos os membros da a equação exponencial acima por *n*, se tem:

$$\left(b^x\right)^n = a^n$$

$$b^{nx} = a^n$$

Escrevendo a equação exponencial em forma de logaritmo, que:

$\log_b a^n = n \cdot x$

Mas, $\log_b a = x$, consequentemente:

$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$

(c.q.d)

Continuando a resolução e utilizando a propriedade demonstrada acima, logo:

$r \cdot \log_e e = \log_e 2$

Aplicando a propriedade 1, conclui-se:

$r \cdot \log_e e = \log_e 2$

$r = \log_e 2$

Logo:

$P(t) = e^{(\log_e 2)t} = e^{(\ln 2)t}$

$P(t) = e^{(\ln 2)t}$

Portanto, o modelo que descreve a situação, é o seguinte:

$P(t) = 2^t$

Anais da Especialização em Educação Matemática-1ª Edição
Ano 2017 N. 02 V. 01 - ISSN 2358-1115

No modelo apresentado nota-se que a aplicabilidade das funções logarítmicas e sua inversa podem ser vistas claramente, de maneira concreta, sem deixar dúvida da sua utilidade no cotidiano, pois de forma direta ou indiretamente, um estudo feito com este tipo de organismo apresenta-se a ideia de como ele seria em nosso corpo, caso um ser humano entre em contato com um tipo desse de bactérias.

Já no crescimento populacional logístico, a análise pode ser mais detalhada até por que seu modelo é descrito de forma que leva em consideração os principais fatores que determinam o crescimento de um tipo de população, e esse modelo pode ser utilizado para caracterizar o crescimento da população humana.

Neste caso, os itens analisados neste trabalho são: emigração e imigração. Isso significa que no modelo que será demonstrado a seguir leva em consideração na análise da entrada e saída dos indivíduos do grupo estudado. Além disso, estende a avaliação as influências sofridas pela taxa de natalidade e de mortalidade dos indivíduos desse grupo observado.

Segue a demonstração do modelo de crescimento logístico e simultaneamente a curva sigmoide, a que descreve graficamente este modelo, então: É sabido que neste evento tem-se uma limitação que é o número de indivíduos dessa população. Aqui verifica-se três fases distintas de acordo dom Odum (p. 292, 2001), que são:

Fase 1: crescimento populacional lento, ela constitui-se na fase de estabelecimento no qual sua aceleração é positiva.

Fase 2: crescimento populacional rápido, ela constitui-se de um aumento tal, que se aproxima de uma curva logarítmica.

Fase 3: nesse momento, a população passa por uma desaceleração gradativa de forma que em algum momento tornará constante de acordo com o percentual de resistência ambiental.

O crescimento logístico é uma taxa de variação do número de indivíduos em relação ao intervalo de tempo, como a taxa é descrita por uma derivada, nota-se que pela definição de derivado, tem-se que: $\frac{dP}{dt}=\lim_{t\to t_0}\frac{P-P_0}{t-t_0}$.

Mas, no logístico a taxa é obtida da seguinte maneira:

$$\frac{dP}{dt} = rP.\left(1-\frac{K}{P}\right)$$

$$\frac{dP}{dt} = rP.\left(\frac{K-P}{K}\right)$$

De acordo com essa vertente, compreende-se que a única diferença existente entre este modelo é que agora será utilizado um fator que representa a taxa máxima de indivíduos que essa população pode obter que é $\left(\frac{K-P}{K}\right)$, onde K é uma constante que representa o quantidade máxima de indivíduos que a população suporta atendendo ao ambiente que estão localizados e comporta-se também como resistência ambiental e graça a essa K (assíntota horizontal) perceberá o motivo que chegar em uma desaceleração gráfica e uma constância no número de indivíduos de uma população. Então, aplicando o conceito de integral, tem-se que:

$$\frac{dP}{dt} = rP.\left(1-\frac{P}{K}\right) \Rightarrow \int \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)} = \int r.dt$$

$$\int \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)} = \int \frac{K}{P.(K-P)}dP$$

Anais da Especialização em Educação Matemática-1ª Edição
Ano 2017 N. 02 V. 01 - ISSN 2358-1115

Para isolar o valor final da população P, utilizará o método de resolução de frações parciais, pois sabe-se que o denominador está em forma de um produto daí é cabível a utilização deste método.

$$\frac{K}{P.(K-P)}dP=\frac{A}{P}+\frac{B}{K-P}$$

$$\frac{K}{P.(K-P)}=\frac{A(K-P)+B.P}{P.(K-P)}$$

$$K=A(K-P)+B.P$$

O valor de P deverá receber valores de tal forma, que haja o cancelamento de uma parcela para determinar os valores das constantes A e B. Conclui-se que P = 0 e P = K, então:

Para P = 0, tem-se que:

$$K=A(K-0)+B.0$$

$$K = AK \quad A=1$$

Para P = K, tem-se que:

$$K=A(K-K)+B.K$$

$$K = BK \quad B=1$$

Consequentemente:

$$\int \frac{K}{P.(K-P)}dP=\int \frac{1}{P}dP+\int \frac{1}{K-P}dP$$

Anais da Especialização em Educação Matemática-1ª Edição
Ano 2017 N. 02 V. 01 - ISSN 2358-1115

$$\int \frac{K}{P.(K-P)}dP = \int \frac{1}{P}dP + \int \frac{\frac{1}{K}}{\left(1-\frac{P}{K}\right)}dP$$

Resolvendo cada parcela do segundo membro da equação acima, então a primeira parcela é a seguinte:

$$\int \frac{1}{P}dP = \ln|P|$$

Resolvendo cada parcela do segundo membro da equação acima, então a primeira parcela é a seguinte:

$$(u)' = \left(1-\frac{P}{K}\right)' \quad \frac{du}{dP} = \frac{-(1.K - P.0)}{K^2} \quad \frac{du}{dP} = \frac{-1}{K} \quad dP = -Kdu$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{P}{K}\right)}dP = \frac{1}{K}\int \frac{1}{u}(-Kdu) = -\int \frac{1}{u}du = -\ln\left(1-\frac{P}{K}\right)$$

$$\int \frac{\frac{1}{K}}{\left(1-\frac{P}{K}\right)}dP = \frac{1}{K}\int$$

Voltando a equação anterior, teremos que:

$$\int \frac{K}{P.(K-P)}dP = \int \frac{1}{P}dP + \int \frac{\frac{1}{K}}{\left(1-\frac{P}{K}\right)}dP$$

$$\int \frac{K}{P.(K-P)}dP = \ln|P| - \ln\left(1-\frac{P}{K}\right)$$

Então, após a determinação destes valores por meio do conceito de integral, então retoma-se a operação inicial que descreve o modelo, nota-se que:

$$\int \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)} = \int r.dt$$

$$\ln|P| - \ln\left|1-\frac{P}{K}\right| = rt + a$$

Percebe-se que os argumentos dos logaritmos serão sempre positivos, pois, P é uma quantidade de indivíduos de uma população é $\left(1-\frac{P}{K}\right)$ neste argumento é explicito que representa o limitante como a população não pode ultrapassar sua capacidade máxima devido aos fatores de resistência, sempre será positiva, portanto, não há necessidade de utilizar módulos desses argumentos.

$$\ln P - \ln\left(1-\frac{P}{K}\right) = rt + a$$

$$\ln\left(\frac{P}{\left(1-\frac{P}{K}\right)}\right) = rt + a$$

$$\frac{P}{\left(1-\frac{P}{K}\right)} = e^{rt+a}$$

$$P = \left(1-\frac{P}{K}\right)e^{rt+a}$$

$$PK = K.e^{rt+a} - P.e^{rt+a}$$

$$P\left(K + e^{rt+a}\right) = K.e^{rt+a}$$

$$P = \frac{K \, . \, e^{rt+a}}{\left(K + e^{rt+a}\right)}$$

Colocando o termo e^{rt+a} em evidência, então:

$$P = \frac{K \, . \, e^{rt+a}}{e^{rt+a}\left(K \, e^{-(rt+a)} + 1\right)}$$

Conclui-se que:

$$P = \frac{K}{K \, e^{-(rt+a)} + 1}$$

$$N = \frac{K}{1 + K \, . \, e^{-(a+rt)}}$$

(4)

Considerações Finais

A abordagem realizada neste trabalho foi um estudo feito acerca das aplicações das funções logarítmicas e sua inversa. Sendo importante para que se entenda algumas situações que são vivenciadas no cotidiano, ou até mesmo compreender os impactos que determinado fenômeno estudado causou. Percebeu-se que ao relatar sobre o crescimento populacional buscou-se não apenas explanar o conceito, mas promover a compreensão dos desenvolvimentos do modelo e utilidades das propriedades que regem a função logarítmica e sua inversa.

Existem duas formas de manifestações da função logarítmicas e sua inversa, que podem ser explicita ou implícita. Teve-se como um dos objetivos destacar esses tipos, pois algumas situações elas passam de maneira tão despercebida, que caso o observador não esteja a par das propriedades dessas funções fica quase impossível visualizá-las e até mesmo de fazer um estudo dos impactos causados por tais fenômenos ou como ocorre determinado evento. Além disso, pode-se observar que a aplicações dessas funções ressaltadas nessa pesquisa são aplicações que promovem influências em nosso cotidiano de duas maneiras: direta ou indireta, dependerá do que será analisado.

Neste artigo, o crescimento populacional foi escolhido para destacar a aplicação logarítmica na Biologia. Foram utilizadas referências que relataram sobre alguns dos casos comprovados das aplicabilidades dessas funções, mesmo porque, são tantos que não seria possível ressaltar todas, por isso realizou-se uma seleção dos mais relevantes.

Relatou-se cada aplicabilidade descrevendo de forma teórica os aspectos de cada uma, e simultaneamente sua representação matemática que se realizou por meio de demonstrações matemáticas. E consequentemente com algumas exemplificações de situações cotidianas, para descreverem e mostrar de fato a presença destas em nossa vida, mesmo que seja de forma indireta ou direta.

Vale ressaltar que o estudo descreve um entendimento mediante a explicação do aumento populacional, por isso, a função logarítmica mesmo que implícita desempenha papel relevante no crescimento de uma certa população, uma vez que é ela responsável por proporcionar os resultados precisos e fundamentais para a formulação do modelo matemático e consequentemente a compreensão de como ela está se desenvolvendo diante das migrações, imigrações e dentre outros fatores. Portanto, o estudo teórico de maneira aprofundada dessas funções promove uma mudança sobre o conceito da sua utilidade, pois só assim percebe-se a relevância que a função logarítmica e sua inversa exercem de forma acintosa nas diversas áreas do conhecimento e atuando fortemente na compreensão de fenômenos que ocorrem em nosso meio cotidiano.

Referências

DICIO. *Dicionário Online de Português.* Definições e significados de mais de 400 mil palavras. São Paulo, 2009 - 2014. Disponível em: < http://www.dicio.com.br/implicito/ >. Acesso em: 16/04/2014.

DICIO. *Dicionário Online de Português*. Definições e significados de mais de 400 mil palavras. São Paulo, 2009 - 2014. Disponível em: < http://www.dicio.com.br/pesquisa.php?q=expl%EDcita >. Acesso em: 16/04/2014.

FERREIRA, Roberto G.. *Matemática financeira aplicada:* Mercado financeiro de capitais, administração financeira, finanças pessoais. 6. Ed.. São Paulo: Atlas, 2008.

FONSECA, Carla Isabel Teixeira Tavares Rebimbas et al. *As funções exponenciais e logarítmicas nos manuais escolares do 12º ano*. Dissertação Mestre em Didática, Universidade de Aveiro. Portugal em Aveiro, 2013. Disponível em: < http://ria.ua.pt/handle/10773/11585 >. Acesso em: 08/05/2014.

LIMA, Elon Lages. *Logaritmos*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática,107 p. (Coleção do Professor de Matemática.), 1996.

MACARINI, Adriana Rodrigues Luz. *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental:* as estratégias de ensino como potencializadoras de aprendizagem. Dissertação (Mestrado de Educação). Universidade do Vale do Itajaí (UNIVALI), Santa Catarina, 2007. Disponível em: < http://www6.univali.br/tede/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=500 >. Acesso: 01/05/2014.

PERONI, Nivaldo; HERNÁNDEZ, Malva Isabel Medina. *Ecologia de Populações e Comunidades.* Florianópolis, 2011. Disponível em: < http://lecota.paginas.ufsc.br/files/2011/09/Livro-Ecologia-de-Populacoes-e Comunidades.pdf >. Acesso em: 03/07/2014.

ODUM, Eugene P. *Fundamentos da Ecologia*. 6ª ed. Fundação Caloueste Gulbenkian. [S.d.] Disponível em: http://ferdesigner.files.wordpress.com/2010/11/fundamentos-de-ecologia-odum.pdf. Acesso: 05/07/2014.

SEVERINO, Antônio Joaquim. Metodologia do trabalho científico – 23. ed. rev. e atual. São Paulo: Cortez, 2007.

SODRÉ, Ulysses. *Equações Diferenciais Ordinárias: Computação, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil.* Notas de aulas, 21/052003. Disponível em: < http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pdfs/edo.pdf >. Acesso em: 31/07/2014.